Fonctions caractéristiques de la gaussienne et de Cauchy

Proposition Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.
Alors la fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est $t \longmapsto e^{i\mu t} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$.

On commence par calculer la fonction caractéristique de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, notons-la φ.
On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{itx} \, dx.$$

Méthode 1 :

On définit $f : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(z, x) \longmapsto e^{-x^2/2} e^{xz}$, alors : $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(it, x) \, dx$

On a :

- $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z, \cdot)$ est mesurable car continue sur $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, x)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (entière)
- soit K un compact de $\mathbb{C}$, il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $z \in K$, $|z| \leqslant c$. On obtient alors : $\forall z \in K, \forall x \in \mathbb{R}$, $|f(z,x)| = e^{-x^2/2} e^{x\mathrm{Re}(z)} \leqslant e^{-x^2/2} e^{|x|c}$ et $x \longmapsto e^{-x^2/2} e^{|x|c} \in L^1(\mathbb{R})$

Par conséquent,

$$F : z \in \mathbb{C} \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(z,x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \text{ est holomorphe sur } \mathbb{C}.$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2/2} e^{xt} \, dx$$

$$\text{"} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-(x-t)^2/2} e^{t^2/2} \, dx$$

$$\text{"} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t^2/2} \int e^{-u^2/2} \, du$$

$$\text{"} = e^{t^2/2}$$

Ainsi, les fonctions F et $z \longmapsto e^{z^2/2}$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et coïncident sur $\mathbb{R}$.
Donc, par le théorème de prolongement analytique, elles coïncident sur $\mathbb{C}$. En particulier,

$$\varphi(t) = e^{(it)^2/2} = e^{-t^2/2}.$$

Méthode 2 :

On définit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x, t) \longmapsto e^{itx} e^{-t^2/2}$.

On a alors :

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
- $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, $|\partial_x f(t,x)| = |e^{-t^2/2} \times it \times e^{itx}| = |t| e^{-t^2/2}$ et $t \longmapsto |t| e^{-t^2/2} \in L^1(\mathbb{R})$

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe intégrale,
φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-t^2/2} it e^{itx} \, dt$

OR :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-t^2/2} e^{itx} it \, dt = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{itx} e^{-t^2/2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} ix \int e^{-t^2/2} e^{itx} \, dt = -x\varphi(x)$$

On obtient donc :

$$\varphi'(x) + x\varphi(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) e^{-x^2/2} = e^{-x^2/2}$.

Conclusion :

Une variable $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ a même loi que $\sigma X + \mu$ où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Donc :

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{it\sigma X} e^{it\mu}] = e^{it\mu} \varphi_X(t\sigma) = e^{it\mu} e^{-t^2\sigma^2/2}$$

Proposition Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b>0$.

La fonction caractéristique de la loi de Cauchy $C(a,b)$ est $t \longmapsto e^{iat} e^{-b|t|}$.

Commençons par calculer la fonction caractéristique de la loi $C(0,1)$: $\varphi : t \longmapsto \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx$.

Méthode 1 :

Soit $t \in \mathbb{R}_+$, on définit $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{e^{itz}}{1+z^2}$.

On considère Γ_R l'union des chemins suivants :

$\gamma_{1,R} : t \in [0,\pi] \longmapsto Re^{it}$ et $\gamma_{2,R} : t \in [-R,R] \longrightarrow t$, $R>1$

Alors par le théorème des résidus :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \operatorname{Res}(i,f)\operatorname{Ind}_{\Gamma}(i) = \operatorname{Res}(i,f)$$

Or, i est un pôle d'ordre 1, donc :

$$\operatorname{Res}(i,f) = \lim_{z \to i} (z-i)f(z) = \frac{e^{-t}}{2i}$$

De plus,

$$\left|\int_{\gamma_{1,R}} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta}\, d\theta\right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{|e^{itRe^{i\theta}}|}{|1+R^2e^{i2\theta}|} R\,d\theta \leqslant \int_0^{\pi} \frac{e^{-Rt\sin\theta}}{R^2-1} R\,d\theta \leqslant \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

$\int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$ avec $|f(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ donc par convergence dominée, on obtient que :

$$\int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx$$

On a donc :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx = \frac{e^{-t}}{2i} \quad \text{i.e.} \quad \varphi(t) = e^{-t},\ t \geqslant 0.$$

Or la loi est symétrique, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = e^{-|t|}$.

Méthode 2 :

Soit $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-|x|}$.

Comme $g \in L^1(\mathbb{R})$, on peut considérer sa transformée de Fourier.

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} e^{-|t|} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \left(\left[\frac{e^{t(-i\xi+1)}}{-i\xi+1} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{t(-i\xi-1)}}{-i\xi-1} \right]_{0}^{+\infty} \right) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \left(\frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} \right) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{2}{1+\xi^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

On a $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ donc par le théorème d'inversion de Fourier,

ppt $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{2}{1+x^2} dx = \varphi(t)$

Or, φ est continue par continuité sous le signe intégrale et g aussi, donc : $\varphi(t) = e^{-|t|}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Conclusion :

Si $Y \sim C(a,b)$, on a $Y = bX + a$ où $X \sim C(0,1)$.

Donc : $\varphi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itbX} e^{ita}] = e^{iat} e^{-|bt|} = e^{iat} e^{-b|t|}$